

Álgebra III

Examen VIII

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Álgebra III

Examen VIII

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

José Juan Urrutia Milán

Granada, 2026

Asignatura Álgebra III.

Curso Académico 2025-26.

Grado Doble grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor José Gómez Torrecillas.

Descripción Examen Extraordinario.

Fecha 9 de febrero de 2026.

Duración 3 horas.

Ejercicio 1. Tomemos $f = (x^4 + 2)(x^2 - 2) \in \mathbb{Q}[x]$ y K el cuerpo de descomposición de f .

1. [1 punto] Demostrar que K es también cuerpo de descomposición de $x^4 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.
2. [1 punto] Describir explícitamente los elementos del grupo $\text{Aut}(K)$.
3. [1 punto] Calcular, listando sus elementos, $\text{Aut}_{\mathbb{Q}(i\sqrt{2})}(K) \cap \text{Aut}_{\mathbb{Q}(\sqrt{2})}(K)$.
4. [1 punto] Calcular el número de subcuerpos de K de grado 4 sobre \mathbb{Q} .

Ejercicio 2. Responder razonadamente a las siguientes cuestiones.

1. [0.5 puntos] Sea α una raíz real de $f = x^3 - 3x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$. ¿Es $\mathbb{Q}(\alpha)$ un cuerpo de descomposición de f ?
2. [0.5 puntos] ¿Cuántos cuerpos finitos no isomorfos entre sí tienen cardinal menor que 25?
3. [0.5 puntos] ¿Es cierto que si K es un cuerpo de descomposición de un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x]$ y $a \in K$, entonces $\text{Irr}(a, \mathbb{Q})$ es un divisor de f ?
4. [0.5 puntos] ¿Satisface todo número constructible con regla y compás una ecuación resoluble por radicales?

Ejercicio 3. Sea F un cuerpo de característica 2 y $a \in F$ tal que $F = \mathbb{F}_2(a)$ y $a^6 = a^3 + 1$.

1. [1 punto] Calcular el cardinal de F .
2. [1 punto] Calcular $\text{Irr}(a^{21}, \mathbb{F}_2)$ y todos los homomorfismos de cuerpos de $\mathbb{F}_2(a^{21})$ a F .

Ejercicio 4. Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz décima primitiva de la unidad.

1. [1 punto] Calcular $\text{Irr}(\omega, \mathbb{Q})$.
2. [1 punto] Calcular, expresando sus generadores en términos de ω , todos los subcuerpos de $\mathbb{Q}(\omega)$.

Nota: Se recuerda, por si es útil en algún ejercicio, que el discriminante de una cúbica reducida $f = x^3 + px + q$ vale $-4p^3 - 27q^2$.